i la branca no focal (amb r negatiu) per

$$\arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right) < \alpha_2 < 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{\epsilon}\right).$$

Aquest fet és important per a la validesa general del teorema dels angles meitat.

Tornant al cas general, si col·loquem el focus en l'origen de coordenades i l'eix d'abscisses coincideix amb l'eix principal de simetria, aleshores podem reescriure l'equació focal en forma vectorial

$$\overrightarrow{FA} = \frac{r_0(1+\epsilon)}{1+\epsilon\cos\alpha}(\vec{e_1}\cos\alpha + \vec{e_2}\sin\alpha).$$

Si definim el producte exterior *real* dels vectors $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2)$ per

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = u_1 v_2 - u_2 v_1$$

la raó doble per punts sobre una cònica pot escriure's com

$$\{X, ABCD\} = \frac{(\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XC})\,(\overrightarrow{XB} \wedge \overrightarrow{XD})}{(\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XD})\,(\overrightarrow{XB} \wedge \overrightarrow{XC})}$$

(consulteu per exemple l'article de R. González, J. Homs i J. Solsona al Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques núm. 12, 1 (1997), 51–71.)

Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi$ són els angles focals dels punts A, B, C, D, X respectivament, llavors

$$\begin{aligned}\overrightarrow{XA} &= \overrightarrow{FA} - \overrightarrow{FX} = \\ &= \frac{r_0(1+\epsilon)}{(1+\epsilon\cos\alpha)(1+\epsilon\cos\xi)}\Big[\vec{e_1}(\cos\alpha - \cos\xi) + \\ &+ \vec{e_2}(\sin\alpha - \sin\xi + \epsilon\sin\alpha\cos\xi - \epsilon\cos\alpha\sin\xi)\Big].\end{aligned}$$

Anàlogament calculem $\overrightarrow{XC}$ i obtenim

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XC} = \\ &= \frac{r_0^2(1+\epsilon)^2}{(1+\epsilon\cos\alpha)(1+\epsilon\cos\gamma)(1+\epsilon\cos\xi)}\cdot \\ &\cdot\Big[(\sin(\gamma-\alpha) + \sin(\xi-\gamma) + \sin(\alpha-\xi)\Big].\end{aligned}$$

Per la fórmula dels angles meitat

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XC} = \\ &= \frac{-4r_0^2(1+\epsilon)^2 \sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\xi-\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\xi}{2}}{(1+\epsilon\cos\alpha)(1+\epsilon\cos\gamma)(1+\epsilon\cos\xi)}.\end{aligned}$$

Ara, la raó doble és

$$\frac{(\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XC})\,(\overrightarrow{XB} \wedge \overrightarrow{XD})}{(\overrightarrow{XA} \wedge \overrightarrow{XD})\,(\overrightarrow{XB} \wedge \overrightarrow{XC})} = \frac{\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\delta-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\delta-\alpha}{2}},$$

un cop simplificat el resultat.

Tal com hem dit abans, aquest resultat és vàlid per a totes les còniques sempre que, en el cas de la hipèrbola, s'interpretin correctament els angles focals.

Tesis

- Miguel Àngel Barja Yañez va llegir la seva tesi, dirigida per Juan Carlos Naranjo, titulada *On the slope and geography of fibred surfaces and threefolds*, el dia 21 de desembre de 1998. La tesi correspon al Departament d'Àlgebra i Geometria de la Universitat de Barcelona.

En aquesta tesi s'estudien varietats fibrades sobre corbes; principalment els casos de les superfícies i 3-varietats fibrades. Al primer capítol, es donen resultats generals de pegaments de morfismes definits sobre la majoria de les fibres d'una aplicació. Al capítol segon, s'estudien desigualtats generals que verifiquen les varietats canòniques, és a dir, les varietats amb morfisme canònic birracional. Al capítol tres, es donen propietats de positivitat dels fibrats imatge directe de múltiples del fibrat dualitzant relatiu. Finalment, als capítols 4 i 5, es donen desigualtats entre els invariants numèrics de les varietats que apareixen als casos de superfícies i sòlids fibrats sobre corbes, respectivament. Aquestes desigualtats es donen en funció de l'anomenada pendent de la fibració, un concepte existent en el cas de les superfícies fibrades i que estenem al cas de les 3-varietats.

- Maria Daniela Ferrero va llegir la seva tesi, dirigida per Carles Padró Laimon, titulada *Grafs i hipergrafs com models de xarxes d'interconnexió*, el dia 21 de juliol de 1999. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica de la Universitat Politècnica de Catalunya.

En aquesta tesi, s'han estudiat diferents problemes relacionats amb la tolerància a errors en xarxes d'interconnexió amb enllaços unidireccionals modelades per dígrafs. També la tolerància a errors, així com altres problemes bàsics en el disseny de xarxes d'interconnexió, han estat tractats en el cas de xarxes amb nodes enllaçats per «busos» unidireccionals modelades per hipergrafs dirigits.

S'han considerat famílies de dígrafs que presenten una bona relació entre l'ordre, el grau i el diàmetre. Concretament, les famílies de cicles generalitzats de De Bruijn i De Kautz. S'han calculat conjunts de camins disjunts entre vèrtexs, mitjançant els quals s'han estudiat diversos conceptes relacionats amb les variacions en el diàmetre produïdes per l'eliminació d'elements.

La iteració del dígraf línia ofereix un mètode general per a l'obtenció de grans dígrafs en relació al seu grau i al seu diàmetre. Per a estudiar la tolerància a errors en aquests dígrafs, s'han introduït diversos conceptes en termes dels quals es presenten fites per les variacions del diàmetre que es produeixen a causa de l'eliminació de determinats elements. Aquestes fites milloren les conegudes en molts sentits. En el cas dels cicles generalitzats de De Bruijn i De Kautz, coincideixen amb les calculades anteriorment.

Per obtenir hiperdígrafs amb diàmetre mínim en relació amb el grau, ordre i mida, s'ha definit la tècnica de l'hiperdígraf línia parcial. Aquesta estén el dígraf línia parcial, l'hiperdígraf línia i, naturalment, el dígraf línia. S'ha provat una conjectura de J. C. Bermond i F. Ergincan per la caracterització d'hiperdígrafs línia.

- Eulàlia Barrierè Figueroa va llegir la seva tesi, dirigida per Josep Fàbrega Canudas, titulada *Anells cordals: propietats estructurals i models de comunicacions*, el dia 14 d'octubre de 1999. La tesi correspon al Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica de la Universitat Politècnica de Catalunya. Ha rebut la menció de *Doctor Europeu.*

En els darrers anys, hi ha hagut un gran desenvolupament de la recerca en l'àrea de les xarxes informàtiques. En aquest context, la utilització dels grafs com a models per a les xarxes ha donat lloc a gran quantitat de treballs. Quan es tracta de xarxes d'interconnexió, en què el nivell d'integració és elevat, es solen considerar models amb bones propietats de simetria, que permeten definir i analitzar els algorismes amb més facilitat. Per exemple, els grafs de Cayley són grafs definits a partir de l'operació d'un grup. Això permet utilitzar l'estructura algèbrica subjacent per a la resolució dels problemes. Aquesta tesi tracta de les propietats d'una família de grafs, els anells cordals de grau 3, que són grafs de Cayley sobre el grup de simetries d'un polígon regular o grup dièdric. Una part important del treball és l'estudi de les propietats estructurals dels anells cordals, mentre que en una segona part es donen algorismes de comunicació punt a punt, o encaminaments, amb bones propietats, i d'intercanvi d'informació entre tots els nodes, o gossiping. Part de l'interès d'aquest treball és l'ús de les tessel·lacions per a la representació dels grafs. Aquesta eina s'ha revelat molt útil en l'estudi de propietats mètriques i de problemes en què s'han d'establir camins entre els nodes, ja que en facilita la visualització. Les altres famílies de grafs que han estat estudiades per diversos autors mitjançant tessel·lacions del pla són, sobretot, els grafs circulants de grau 4, en què s'utilitzen quadrats per representar els vèrtexs, i de grau 6, en què s'utilitzen hexàgons. Per als anells cordals de grau 3 s'han utilitzat triangles. En particular, es veu com la tessel·lació determina totalment el graf, i les propietats del graf es tradueixen en propietats de la tessel·lació.